Exercices et problèmes

1 Déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 558$ et $b = -1235$.
2. $a = 924$ et $b = 990$.
3. $a = -999$ et $b = 888$.
4. $a = 1890$ et $b = -5250$.

2 Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 588$ et $b = -1235$.
2. $a = 51$ et $b = -255$.
3. $a = 2n+1$ et $b = n$, où n est un entier non nul.

3 Trouver les valeurs possibles de l'entier a sachant que $a \wedge 180 = 36$ et $|a| < 360$.

4 Trouver tous les couples (a, b) d'entiers non nuls tels que $a \wedge b = 19$ et $ab = 2166$.

5 Montrer qu'il n'existe aucun couple (a, b) d'entiers tels que $a \wedge b = 19$ et $a^2 - b^2 = 490$.

6 1. Montrer que

$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ et $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$.

2. En déduire les congruences

$2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$ et $2^{340} \equiv 1 \pmod{31}$.

3. Montrer que 341 divise $2^{340} - 1$.

7 La décomposition de 561 en facteurs premiers est $561 = 3 \times 11 \times 17$.

Soit a un entier premier avec 561.

1. Vérifier que a est premier avec chacun des entiers 3, 11 et 17.
2. Montrer que

a. 3 divise $a^2 - 1$.

b. 11 divise $a^{10} - 1$.

c. 17 divise $a^{16} - 1$.

3. En déduire les congruences

$a^{560} \equiv 1 \pmod{3}$, $a^{560} \equiv 1 \pmod{11}$ et $a^{560} \equiv 1 \pmod{17}$.

3. Montrer que 561 divise $a^{560} - 1$.

8 Soit a, b et d trois entiers non nuls tels que $a \wedge b = d$.

1. Montrer que si un entier n divise $4a + 5b$ et $5a + 2b$ alors n divise 17a et 17b.
2. En déduire que $(4a + 5b) \wedge (5a + 2b) = d$ ou $(4a + 5b) \wedge (5a + 2b) = 17d$.

9 Soit a, b et n trois entiers non nuls.

1. Montrer que si d divise a et b alors d divise $a + bn$ et $a + b(n-1)$.
2. Montrer que si d divise $a + bn$ et $a + b(n-1)$ alors d divise a et b.
3. En déduire que $a \wedge b = (a + bn) \wedge (a + b(n-1))$.

10 1. a. Donner une solution particulière de $5x \equiv 1 \pmod{17}$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $5x \equiv 1 \pmod{17}$.

c. Donner les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $345x \equiv 1 \pmod{17}$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $5x \equiv 2 \pmod{17}$.

b. Donner les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $430x \equiv 2 \pmod{17}$.

11 Résoudre dans $\mathbb{Z}$

a. $17x \equiv 1 \pmod{33}$.

b. $17x \equiv -9 \pmod{33}$.

12 Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tels que $12x \equiv 30y \pmod{15}$.